Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2020/2021. 2. feladatsor**
5.-6. évfolyam

RENDSZEREZZÜNK ÉS GONDOLKODJUNK

Bevezetés

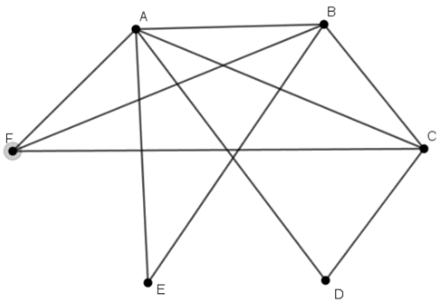
A matematikában sok olyan feladat van, amikor különböző lehetőségeket kell összeszámlálnunk. Az ilyen összeszámlálási problémákkal a matematikának egy külön ága, a kombinatorika foglalkozik. A lehetőségek összeszámlálása során figyelnünk kell arra, hogy a feladat kérdésének a megválaszolásához az összes lehetőséget meg kell számolni vagy pedig csak bizonyos feltételeknek eleget tevő lehetőségeket kell vizsgálnunk. A vizsgálat során célszerű a lehetőségeket valamilyen módon rendszerezni, mivel így a különböző esetek leszámlálása könnyebben elvégezhető és kiküszöbölhetőek az olyan hibák, hogy nem minden esetet vizsgálunk meg és számolunk össze. Egyes kombinatorikai feladatokban a lehetséges sorrendek száma a kérdés, más feladatokban viszont a különböző kapcsolatok vizsgálata. Az esetek leszámlálásakor folyamodhatunk felsoroláshoz is, míg a kapcsolatok vizsgálatához célszerű ábrát készíteni. Különösen érdekesek az olyan feladatok, amikor több lehetőség közül csak egy olyan létezik, amelyik a feladat feltételeinek megfelel. Ilyenkor a lehetőségek sokaságából ezt az egyet kell megtalálni, ilyenkor nagy szükség van a módszeres rendszerezésre.

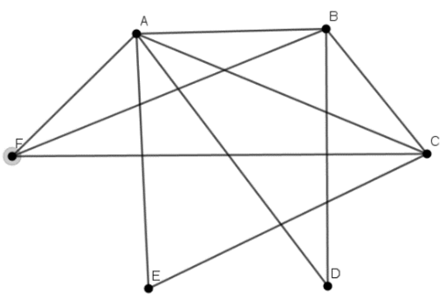
Mintapéldák

1.) Egy vízilabda bajnokságban 6 csapat vesz részt. Az Aligátorok csapata minden mérkőzését lejátszotta. A Bálnák és Csukák csapata 4-4 mérkőzést, míg a Delfinek és Ebihalak csapata 2-2 mérkőzést játszott. A Fókák csapata már lejátszott 3 mérkőzést. Soroljuk fel a még hátralévő mérkőzéseket, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik!

Megoldás:

A feladat feltételei szerint az eddig lejátszott mérkőzéseknek két kimenetele lehetséges. Ezeket az alábbi ábrákon szemléltetjük:





A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

A bal oldali ábra szerint még nem játszották le az alábbi mérkőzéseket:

Bálnák - Delfinek
Csukák - Ebihalak
Fókák – Delfinek
Fókák – Ebihalak
Ebihalak - Delfinek

A jobb oldali ábra szerint még hátra vannak az alábbi mérkőzések:

Bálnák – Ebihalak
Csukák – Delfinek
Fókák – Delfinek
Fókák – Ebihalak
Ebihalak – Delfinek

2.) A hét törpe gombát gyűjtött az erdőben. A gombaszedés után mind a heten letették a földre egy sorba a kosarukat, megszámlálták a kosarukban lévő gombákat és a kapott számokat ráírták a kosarukra. Sorrendben a következő számok kerültek a kosarakra: 19; 9; 26; 8; 18; 11; 14. Mielőtt hazaindultak volna, Hófehérke átrendezte a kosarukban lévő gombákat úgy, hogy ugyanannyi gombát vigyen haza minden törpe. Az átrendezés során egy-egy kosárból csak a vele szomszédos kosárba rakott át gombákat. Legkevesebb hány gombát kellett áttennie, ha ugyanazt a gombát kétszer nem tehette át?

Megoldás:

Összesen 105 gomba és 7 kosár van. Ezért az átrendezés után minden kosárban $105:7=15$ gomba lesz. Az átrendezés során figyelembe kell vennünk, hogy amennyiben valamelyik kosárból egy másikba gombákat helyezünk, akkor az utóbbiból már nem helyezhetünk át gombát másikba, mivel így megtörténhet, hogy ugyanazt a gombát tesszük át. A fentiek figyelembe vételével az átrendezés a következőképpen történhet:

- az elsőből a másodikba 4 gombát;
- a harmadikból a másodikba 2 gombát;
- a hatodikból a hetedikbe 1 gombát;
- az ötödikből a hatodikba 5 gombát;
- a negyedikből az ötödikbe 2 gombát;
- a harmadikból a negyedikbe 9 gombát;

Tehát Hófehérékének legkevesebb $4+2+1+5+2+9=23$ gombát kellett áttennie.

3.) A matematika szakkörön nyolc tanuló ül kettesével négy padban. A padok egymás mögött helyezkednek el. Határozzuk meg, hogy melyik gyerek hányadik padban ül, ha tudjuk, hogy:

a) Edina Réka háta mögött ül;
b) Krisztina az utolsó padban ül;
c) Amália nem ül a második padban;
d) Réka a harmadik padban ül;
e) Dalma Emese háta mögött ül;
f) Emese nem ül az első padban;
g) Ilona Emese előtt ül.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Megoldás:

Mivel Réka a harmadik padban és Edina a Réka háta mögött ül, ezért Edina az utolsó (negyedik) padban ül és a b) feltétel alapján ő a Krisztina padtársa. Ezért Dalma nem ülhet az utolsó padban, viszont e) és f) feltételek alapján (Dalma Emese háta mögött ül, Emese pedig nem ül az első padban) következik, hogy Dalma a harmadik padban, míg Emese a második padban ül. A g) állítás értelmében Ilona (Emese előtt) az első padban ül. Az eddigi következtetések és a c) feltétel szerint Amália az első padban ül. Továbbá, kizárásos alapon, a nyolcadik gyerek (akinek a nevét a feladat nem említi) a második padban ül.

4. pad	Krisztina	Edina
3. pad	Dalma	Réka
2. pad	Emese	8. lány
1. pad	Ilona	Amália

4.) András, Pál és János vásárba mentek Margittal, Évával és Annával. A lányok mindegyike valamelyik fiatalember jegyese és valamelyik másiknak a testvére. András 40 tallérért ajándékot vásárolt a jegyesének, 24 tallérért a testvérének és 10 tallérért a harmadik lánynak. Hasonló sorrendben Pál 36, 28 és 8 tallért, János 38, 26 és 10 tallért költött ajándékra. Anna 72 tallér értékben kapott ajándékot, Margit pedig 70 tallér értékben. A lányok közül ki kinek a jegyese és ki kinek a testvére a fiatalemberek közül?

Megoldás:

Figyelembe véve, hogy Anna 72, illetve Margit 70 tallér értékű ajándékot kapott, a következő három eset lehetséges:

1. Anna: 38, 26, 8 tallér; Margit: 36, 24, 10 tallér; tehát Éva: 40, 28, 10 tallér. Ez nem lehetséges, mivel ebben az esetben János testvére és menyasszonya is Anna lenne.

2. Anna: 38, 24, 10 tallér; Margit: 36, 26, 8 tallér; tehát Éva: 40, 28, 10 tallér. Ez sem lehetséges, mivel például András 40, 24 és 10 talléros összegei közül egyik sem helyezhető Margithoz.

3. Anna: 36, 26, 10 tallér; Margit: 38, 24, 8 tallér; tehát Éva: 40, 28, 10 tallér. Ebben az esetben próbálkozásainkat táblázatba foglaljuk.

	Anna	Margit	Éva
András	10	24	40
Pál	36	8	28
János	26	38	10

A táblázatból kitűnik, hogy Éva Andrásnak, Anna Pálnak, illetve Margit Jánosnak a jegyese, valamint Margit Andrásnak, Éva Pálnak és Anna Jánosnak a testvére.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Gyakorló feladatok

1.) Egy nagyon okos kistérségi vezető az általa irányított öt településen (ezek nevei Búbánat, Lomhafalva, Pocoklak, Nagymellény és Marhulok) között utak építését tervezi. Rajzoljuk le a települések közötti útvonalakat, ha az okos vezető a következő terveket készíti:

   a) Búbánatról három, Lomhafalváról egy, a többi településről két-két út indul;

   b) Búbánatról négy, Lomhafalváról kettő, a többi településről három-három út indul;

   c) Búbánatról, Lomhafalváról és Pocoklakról négy-négy, a többi településről két-két út indul.

   Vajon minden esetben sikerül a nagyon okos vezetőnek megvalósítani terveit? Ha nem akkor, miért?

2.) Józsi bácsi a következőket szokta mondani barátainak: „Mindegyik gyerekemnek annyi gyereke van, mint ahány testvére. Gyerekeim és unokáim száma együttvéve annyi, mint életéveimnek a száma.” Milyen idős lehet Józsi bácsi?

3.) Az alábbi táblázat bal alsó sarkából indulva a jobb felső sarokba akarunk eljutni úgy, hogy minden négyzeten legfeljebb egyszer haladhatunk át, és az utunkba eső legtöbb pontot akarjuk összeszedni. Mennyi a legtöbb összegyűjthető pont?

2	3	3	7
3	1	6	2
4	9	11	2
1	7	5	18

4.) Nagyonokos Köztársaságban csak 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 és 489 címletű bankjegyek vannak forgalomban. Ennek a köztársaságnak a miniszterelnöke kijelenti, hogy bármilyen egy és ezer közötti összeg kifizethető úgy, hogy bármelyik típusú bankjegyet legfeljebb egyszer használhatjuk fel. Igaza van a miniszterelnöknek? Válaszunkat indokoljuk!

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) András, Béla, Cecil, Dénes és Elemér egy baráti találkozót szerveztek a Neigyálsört nevű kávézóban. A találkozóra Cecil később érkezett, mint András. Dénes és Elemér nem közvetlenül egymás után érkeztek, viszont Dénes érkezett hamarabb. Az érkezők között nem Béla volt az utolsó és nem Dénes volt az első. Hányféle sorrendben érkezhettek? Soroljuk fel az összes lehetőséget!

2.) Móric azt a feladatot kapta, hogy írjon fel 12 különböző pozitív egész számot úgy, hogy azok összege 81 legyen. Melyek lehetnek ezek a számok? Soroljuk fel az összes lehetőséget!

3.) A matematika tanár egy csapatversenyre 6 tanulót (András, Balázs, Dénes, Emese, Flóra és Hajni) nevezett be. Egy csapatnak két vagy három tanulóból kell állnia. A tanár úgy döntött, hogy minden csapatban legyen legalább egy lány. Hányféleképpen állíthatja össze a csapatokat?

4.) András leírta 1-től kezdődően növekvő sorrendben a pozitív egész számokat. (1234567891011121314…) Melyik számjegy áll a 2021. helyen?

Beküldési határidő: **2020.12.19.**

Postai cím: Észak.-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

ALGEBRAI TESZTFELADATOK

(feleletválasztós feladatok)

Bevezetés

A feleletválasztós feladatmegoldás a mai modern matematikai feladatmegoldó gondolkodás kikerülhetetlen része. Gondoljunk csak olyan közkedvelt tesztversenyeinkre, mint a Zrínyi Ilona Matematikaverseny, a Kenguru Nemzetközi Matematikaverseny vagy a Bolyai Matematika Csapatverseny. A klasszikus kidolgozós feladatmegoldás igényli egy matematikai feladat indoklásos, részletes megoldását, ezért igyekszünk mi is ezt az utat követni ebben a levelező fordulóban. Néha viszont az is jó stratégia, hogy a helytelen megoldásokat logikailag próbáljuk kiszűrni. Jó munkát kívánunk mindenkinek, aki ebbe a kalandba belevág.

Mintapéldák

1.) Hófehérke elhatározta, hogy meghatározza a törpék átlagmagasságát. Egy napon mind a hetet megmérte és a kapott eredmény tizedesnyi pontossággal 112,3 cm lett. Morgó azonban megsértődött, mert róla megfeledkezett Hófehérke, és helyette Vidort mérte kétszer, aki 3 cm-rel alacsonyabb, mint Morgó. Mennyi tehát a 7 törpe helyes átlagmagassága, tizedcentiméterre kerekítve?

(A) 111,9 cm (B) 112,3 cm (C) 112,7 cm (D) 113,8 cm (E) 115,3 cm

Megoldás:

Mivel a 112,3 cm kerekített eredmény, ezért a kapott eredmény112,25 cm és 112,35 cm között van. Ezért a magasságok összege ezek 7-szeresei közé esik, azaz: 785,75 cm és 786,45 cm között van. Mivel Morgó adata helyett Vidor 3 cm-rel kisebb adata szerepel, így a valódi magasságok összege 788,75 cm és 789,45 cm között, a valódi átlag pedig ezek hetedei közé, azaz: 112,68 cm és 112,78 cm között van. **A helyes válasz: (C).**

1. Megjegyzés: Amennyiben tudnánk, hogy Hófehérke a mérést centiméteres pontossággal végezte el, akkor a törpék kapott összmagassága 786 cm, a Morgóval korrigált eredmény pedig 789 cm lenne, így az átlag 112,7142857…)

2. Megjegyzés: Az átlagmagasság nőni fog, ha egy alacsonyabbat magasabbra cserélünk, így A és B megoldások kiesnek. Ha 7 fős átlagnál 3-mal növeljük az összeget, akkor az átlag 3/7-del nő, ami kb. 0,42, így a D és E megoldások túl nagyok lennének, ezért ők is kiesnek.

2.) Ha az a, b, c-vel jelölt számok pozitívak, továbbá $3a = 7b = 6c$, akkor a, b, c számok nagyság szerinti növekvő sorrendje:

(A) c, a, b (B) b, c, a (C) b, a, c (D) a, b, c (E) a, c, b

<u>*Megoldás:*</u>

A $3a = 7b = 6c$ összefüggés azt jelenti, hogy a, b, c fordítottan arányos a 3, 7 ,6 számokkal. így a legkisebb a b, aztán c, végül a következik. **A helyes válasz: (B).**

<u>1. Megjegyzés:</u> Teszt feladatoknál úgy is gondolkodhatunk, hogy találunk egy konkrét megoldást, ami ugyan nem adja meg biztosan a jó megoldást/megoldásokat, de a rosszakat kiszűrhetjük, így annak tudatában, hogy a válaszok között ott van a jó is, már tudunk választani. Esetünkben, ha egész számok közül választunk hármat, akkor az oszthatóság miatt a LKKT(3,7,6) = 42 esetén kapjuk meg, hogy: $3 \cdot 14 = 7 \cdot 6 = 6 \cdot 7$, azaz $a = 14, b = 6, c = 7$. Ezekre a számokra a B megoldáson kívül az összes többi helytelen, így marad a B megoldás.

<u>2. Megjegyzés:</u> A feladat szövegében fontos a pozitív szó, mert ellenkező esetben $a = b = c = 0$ is megoldás lehetne, így semelyik válasz nem lenne igaz.

3.) Ha $b = 4d$, $c = 2d$ és $b + c + d = 42$, akkor $b =$

(A) 6 (B) 7 (C) 12 (D) 24 (E) 28

<u>*Megoldás:*</u>

Az adott feltételek mellett: $b + c + d = 4d + 2d + d = 7d = 42$, ahonnan $d = 6$, azaz $b = 24$. **A helyes válasz: (D).**

Megjegyzés az (A) válasz könnyen félre visz, ha nem vesszük észre, hogy NEM a b a kérdés!

4.) Ha $(x – 3)\cdot(2x + 1) = 0$, akkor $2x + 1$ lehetséges értéke:

(A) Csak 0 (B) 0 és 3 (C) $-\frac{1}{2}$ és 3 (D) 0 és 7 (E) $-\frac{1}{2}$ és $\frac{7}{2}$

<u>*Megoldás:*</u>

$2x + 1$ lehetséges értéke 0, mivel egy olyan szorzat egyik tényezője, melynek értéke 0. Ha $2x + 1$ nem 0, akkor a szorzat másik tényezője kell, hogy 0 legyen. $x – 3 = 0$ esetén $x = 3$, így $2x + 1=7$. **A helyes válasz: (D).**

Gyakorló feladatok

1.) Az osztályban a fiúk száma a lányok számának $\frac{3}{4}$ része. Hányad része a fiúk száma az egész osztálylétszámnak?

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) 0,75

2.) Nekeresd városban Nevenincs gazda szolgát fogadott, ígérve neki egy évre 100 aranyat és egy lovat. Hét hónap elteltével azonban a szolga elment és távozáskor megkapta – jogos bérként – a lovat és még 20 aranyat. Hány aranyat ér a ló?

(A) 20 (B) 60 (C) 80 (D) 92 (E) 100

3.) Ha $2x + 1 = 8$, akkor $4x + 1 =$

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

4.) Mennyi az $a^2 + \frac{1}{a^2}$ kifejezés értéke, ha $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 5$?

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 25 (E) 26

Kitűzött feladatok

(Nem elég csak a jó megoldást jelölni, ki is kell dolgozni a helye megoldást!)

1.) Éva most 24 éves, kétszer olyan idős, mint Kati volt akkor, amikor Éva olyan idős volt, mint Kati most. Hány éves most Kati?

(A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 20

2.) Ha $5x – 3$ értéke 5, akkor mennyit ér $10x – 10$?

(A) -6 (B) -2 (C) 6 (D) 10 (E) 14

3.) A $3\cdot(x – 2) - 2\cdot(2 – x)$ kifejezés legegyszerűbb alakja:

(A) $x – 2$ (B) $5x – 10$ (C) $10 – x$ (D) $2x – 2$ (E) $2x + 2$

4.) A □ jellel szimbolizált művelet bármely valós a és b szám esetén a következő: $a \square b = ab + a + b$. Ha $3 \square 5 = 2 \square x$, akkor x értéke:

(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 7,5 (E) 11,5

Beküldési határidő: **2020. 12. 19.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.