



Testek felszíne és térfogata

A testek felszínének és térfogatának tanulmányozása nagyon sok olyan gyakorlati problémát vet fel, amelyekkel mindennapjainkban gyakran találkozunk. Találkozunk például olyan feladatokkal, amikor azt kell meghatároznunk, hogy mennyi csempe szükséges a burkoláshoz, mennyi festék egy falfelület lefestéséhez vagy mennyi papír egy ajándékdoboz csomagolásához, ezek mind a felszín fogalmával kapcsolatos problémák. Ha azt akarjuk meghatározni, hogy egy bizonyos tárgy mennyi helyet foglal el a térben, illetve milyen mennyiségű folyadékot tárolhatunk a belsejében, mindig előkerül a térfogat és űrtartalom kiszámításának kérdése.

Mintapéldák

- 1.) Péter egy akváriumot vásárolt, amelynek belső méreteiről tudjuk, hogy a hosszúsága háromszorosa a szélességének, míg a magassága a szélességének a kétszeresével egyenlő, az élek hosszának összege pedig 960 cm. Az akváriumot a $\frac{7}{8}$ részéig töltötte fel vízzel.
- a) Hány liter vizet használt fel?
- b) Az akváriumba kétféle díszhalat, guppit és harcsát akar tenyészteni. Úgy tervezte, hogy háromszor annyi guppit telepít, mint harcsát. Minden halnak 3 dl élettérre van szüksége. Hány guppit, illetve harcsát vásároljon külön-külön?

Megoldás:

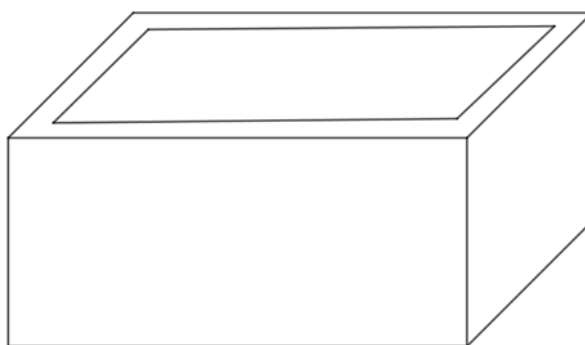
- a) *Elsőként kiszámítjuk az akvárium belső méreteit. Mivel az élek összegében úgy a hosszúság, mint a szélesség és a magasság négyszer szerepelnek ezért a hosszúság, szélesség és magasság összege $960 : 4 = 240$ cm. Ezeknek a méreteknek a szakaszos ábrája a következő:*



Egy ilyen szakasz hossza $240:6 = 40$ cm, ezért az akvárium hosszúsága $3 \cdot 40 = 120$ cm, szélessége 40 cm, míg magassága $2 \cdot 40 = 80$ cm. Az akvárium térfogata $120 \cdot 40 \cdot 80 = 384000$ cm³, tehát az akváriumba 384 liter víz fér el. Mivel Péter az akváriumot $\frac{7}{8}$ részéig töltötte föl vízzel, ezért összesen $384:8 \cdot 7 = 336$ liter vizet használt fel.

- b) Elsőként kiszámítjuk, hogy három guppi és egy harcsa számára 16 dl élettér szükséges. Mivel az akváriumban 336 liter víz van, ezért $336:16 = 21$ - szer több halat, vagyis 63 guppit és 21 harcsát vásárolhat.

- 2.) János gazda a tehenei számára egy itatót tervezett, amelynek a vázrajza az alábbi ábrán látható:



Az itató külső méretei 10m, 3m, illetve 1m, az aljának és a függőleges falainak vastagsága 10 cm.

- a) Hány liter víz fér el az itatóban?
 b) Mennyi beton szükséges az itató elkészítéséhez?

Megoldás:

- a) Mivel az itató külső méretei 10 m, 3 m és 1m, a falainak vastagsága pedig 10 cm, ezért az itató belső méretei 99 dm, 29 dm és 9 dm. Így az itatóban 25839 dm³, azaz 25839 liter víz fér el.
 b) Az itató teljes térfogata (külső méreteivel számolva) $10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$ m³. Ebből kivonva az itató belső térfogatát adódik, hogy az itató elkészítéséhez: $30000 - 25839 = 4161$ dm³ beton szükséges.

- 3.) Egy téglatest élei centiméterben mérve 1-nél nagyobb egész számok, térfogata 1638 cm³. A téglatest egyik lapjának területe 91 cm². Számítsuk ki a téglatest felszínét!

Megoldás:

Mivel a téglatest élei centiméterben mérve 1-nél nagyobb egész számok, és egyik lapjának területe 91 cm², ezért ennek a lapnak az oldalai 13 cm és 7 cm hosszúak. A téglatest harmadik oldalának hossza $1638:91 = 18$ cm.

Tehát a téglatest felszíne $2 \cdot (13 \cdot 7 + 13 \cdot 18 + 7 \cdot 18) = 902$ cm².

- 4.) Józsi bácsi egy istállót épít a tehenei számára. Úgy tervezi, hogy az istálló hosszúsága 40 m, szélessége 20 m és magassága 3 m legyen. Az istállóra tervez még egy bejárati ajtót, melynek magassága 2 m és szélessége 1 m, és 12 négyzet alakú ablakot, ezeknek oldalhossza 0,5 m. Pista bácsi, a kőműves 1 m² falat 4500 Ft-ért épít fel. Mennyit fizet Józsi bácsi Pista bácsinak a falak megépítéséért?

Megoldás:

Kezdetben kiszámítjuk a teljes falfelületet, majd ebből kivonjuk a nyílászárók területét. Figyelembe véve az istálló méreteit a teljes falfelület $2 \cdot 40 \cdot 3 + 2 \cdot 20 \cdot 3 = 360 \text{ m}^2$. Az ajtó területe $2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^2$, míg az ablakok összterülete $12 \cdot 5 \cdot 5 = 300 \text{ dm}^2$, vagyis 3 m^2 . Tehát Pista bácsi összesen $360 - 2 - 3 = 355 \text{ m}^2$ falat épít, ez Józsi bácsinak összesen $355 \cdot 4500 = 1\,597\,500$ forintba kerül.

Gyakorló feladatok

- 1.) Egy négyzetes oszlop alakú víztározó edény $\frac{5}{8}$ részében 75 liter víz van. Az edény alapjának hosszúsága 2 m. Hány m² bádoglemezre volt szükség az edény elkészítéséhez?
- 2.) Egy kocka élének hossza 5 cm. Egyik élét megnöveltük, így egy olyan négyzetes oszlopot kaptunk, amelynek felszíne 210 cm². Mennyivel növeltük meg a kocka élét?
- 3.) Egy téglatest felszíne 392 cm². A téglatest hosszúsága 12 cm, szélessége 8 cm. Mennyivel egyenlő a téglatest térfogata?
- 4.) 8 cm³ alakú kiskockákból 288 cm³ térfogatú téglatesteket alkotunk.
 - a) Mennyivel egyenlő a kiskocka egy éle?
 - b) Mekkora lehetnek a keletkezett téglatest élei? Soroljuk fel az összes lehetőséget!
 - c) Számítsuk ki a legnagyobb és legkisebb felszínű téglatestek térfogatának különbségét!

Kitűzött feladatok

- 1.) Egy téglatest térfogata 48 cm^3 , élei centiméterben mérve egész számok.
 - a) Mekkoraak lehetnek a téglatest élei? Soroljuk fel az összes lehetőséget!
 - b) Számítsuk ki a legnagyobb térfogatú test térfogatát!
 - c) Számítsuk ki a legkisebb felszínű test felszínét!
- 2.) Pancsikoljunk település polgármestere strandot és benne egy úszómedencét tervez, melynek hosszúsága 30 m, szélessége 15 m, mélysége pedig 3 m. A medence belsejét csempével burkolják. Hány m^2 csempét kell beszerezni, ha a felhasznált anyag $\frac{1}{10}$ része hulladék?
- 3.) Józsi bácsi bortárolás céljára egy bádoghordót készít. A hordót négyzetes oszlop alakúra tervezi, amelynek alapéle 4 m, magassága 3 m.
 - a) Hány hektoliter bor fér el ebben a hordóban, ha a tárolás szempontjait figyelembe véve csak a $\frac{7}{8}$ részéig töltheti meg?
 - b) Hány m^2 bádoglemezt kell beszereznie, ha a felhasznált mennyiség $\frac{1}{9}$ része hulladék?
- 4.) Egy téglatest szélessége 2 m. A hosszúságát 5 m-rel növelve a térfogata 30 m^3 -rel növekszik. Mekkora a téglatest magassága?

Beküldési határidő: **2021. 03. 01.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt



Számelméleti tesztfeladatok

(feleletválasztós feladatok)

Idei versenyünk második fordulójának feladatsora feleletválasztós algebrai feladatokat tartalmazott, melyekre néhány tökéletesen kidolgozott - vagy ahhoz közeli - munkát kaptunk. A mostani tesztfeladatokból álló feladatsor számelméleti jellegű, kombinatorikai elemekkel tűzdelve. Igyekeztünk a teszt típusú feladatsor miatt azt nem túl egyszerű feladatokból összeállítani, hiszen ennek a feladatsornak is nagy szerep jut a verseny döntője mezőnyének kialakulásában. Sok sikert és türelmet kívánunk minden matematikát szerető versenyzőnknek!

Mintapéldák

1.) Mennyi a számjegyek összege abban a legnagyobb háromjegyű páros számban, amelynek minden jegye különböző prímszám?

- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 18 (E) 21

Megoldás:

A szóban forgó szám a 752, $7+5+2=14$. A helyes válasz: A.

2.) Egy kétjegyű pozitív egész számot kétszer egymás után írtunk. Melyik állítás igaz mindig a kapott négyjegyű számra?

- (A) A szám osztható 2-vel.
(B) A szám osztható 4-gyel.
(C) A szám osztható 11-gyel.
(D) A szám osztható 101-gyel.
(E) A szám osztható 202-vel.

Megoldás:

Jelöljük a kétjegyű szám egymás utáni írásával kapott számot \overline{abab} - vel, majd írjuk fel helyiértékek segítségével.

$$\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101 \cdot (10a + b)$$

A felírásból látható, hogy a szám a és b értékétől függetlenül osztható 101-gyel (a többi számmal viszont nem mindig osztható). A helyes válasz: D.

3.) Az alábbi számok közül melyik nem lehet egy természetes szám számjegyeinek a szorzata?

- (A) 21168 (B) 14175 (C) 8820 (D) 4095 (E) 18144

Megoldás:

Bontsuk prímtényezőik szorzatára az adott számokat.

$$\begin{aligned} 21168 &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2; & 14175 &= 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7; & 8820 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2; \\ 4095 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13; & 18144 &= 2^5 \cdot 3^4 \cdot 7. \end{aligned}$$

A 4095 felbontásában szerepel olyan tényező, a 13, amelyik nem számjegy.

A helyes válasz: D.

4.) Melyik számmal nem osztható az alábbiak közül a $2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022}$ összeg?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 7 (E) 8

Megoldás:

Mivel a $2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2020}(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2020}$, így a felsorolt számok közül az összeg csak 3-mal nem osztható, mert a 2^{2020} osztható 2-vel, 4-gyel és 8-cal is.

A helyes válasz: B.

Gyakorló feladatok

1.) Hány nulla lesz a $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 25$ szorzat végén?

- (A) 4 (B) 5 (C) 2 (D) 1 (E) Egy sem.

2.) Két pozitív egész szám összege 1323, a legnagyobb közös osztójuk 147. Hány ilyen számpár van?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3.) Hány olyan kétjegyű szám van, amelyhez ha hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, akkor 7-tel osztható számot kapunk?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 11 (E) 12

4.) Milyen számjegyre végződik a $19^{95} + 95^{19}$ összeg?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 9

Kitűzött feladatok

- 1.) Tekintsük azon számokat 1-től 100-ig, amelyeknek a prímtényező felbontásában a 7 a legkisebb tényező. Hány ilyen szám van?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 14
- 2.) Egy négyjegyű pozitív egész számból kivontuk a számjegyei összegét, s az így kapott négyjegyű szám számjegyeit összekevertük. Az összekeverés után kapott számba valahová beírtunk egy ötödik számjegyet. Az így kapott szám a 23456. Mi volt a beírt ötödik számjegy?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
- 3.) Hány olyan természetes szám van, amelynek a 6-tal való osztási maradéka a szám negyede?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- 4.) Hány olyan nyolcjegyű pozitív egész szám van, amelyben bármely két számjegy szorzata ugyanannyi?
(A) 0 (B) 9 (C) 10 (D) 18 (E) 20

Beküldési határidő:

2021. 03. 01.

Postai cím:

Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre