



AZ ÁTLAGSZÁMÍTÁS

Egy számsokaság átlagán az értékek számtani középárányosát értjük. Matematikailag az átlag kiszámításánál a számsokaság értékeit összeadjuk, majd osztjuk az elemszámmal. Tehát egy mennyiségi változó átlaga a felvett összes érvényes érték számtani középárányosa. A számsokaság egészét egyetlen számértékkel jellemzi, így a sokaságok tulajdonságait a legtömörebb formában fejezi ki. Ezért hatékony eszközt jelent a különböző számsokaságok összehasonlításakor. Az átlag a számsokaság minden egyes értékétől függ, így egyetlen érték változása megváltoztatja az átlag értékét is. A számtani átlag a legtöbb ember számára világos és könnyen értelmezhető, számítása egyszerű. Viszont hátránya az, hogy a kirívóan alacsony, illetve magas értékek is hatással vannak az átlagos érték nagyságára. Ha néhány ilyen érték is van a számsokaságban, akkor nem biztos, hogy az átlag megbízhatóan jellemzi az illető adathalmazt. Ugyanakkor fontos kiemelni, hogy a számsokaság átlagát szorozva az elemek számával megkapjuk a számsokaság tagjainak összegét.

Mintapéldák

- 1.) Egy 30 fős osztályban matematika dolgozatot írtak. A dolgozatokra kapott érdemjegyek átlaga 3-as volt. Öt tanuló dolgozata ötös, négy tanuló dolgozata négyes volt és senki sem kapott egyest. A kettes dolgozatok száma kétszerese volt a hármas dolgozatok számának. Hány darab kettes, illetve hármas osztályzat volt külön- külön?

Megoldás:

Az osztályzatok átlaga 3 és az osztálylétszám 30, ezért az osztályzatok összege $30 \cdot 3 = 90$. Mivel öt tanuló dolgozata ötös, négy tanuló dolgozata négyes volt és senki sem kapott egyest, ezért a kettes és hármas osztályzatokat összeadva $90 - (5 \cdot 5 + 4 \cdot 4) = 49$ -et kapunk. Tudjuk, hogy a kettesek száma kétszerese a hármasok számának, ezért abból indulunk ki, hogy két darab kettes és egy darab hármas osztályzat összesen $2 \cdot 2 + 3 = 7$ pontot jelent. Viszont a jelen helyzetben a kettes és hármas osztályzatok összege 49, ezért a hármasok száma $49: 7 = 7$, illetve a kettes osztályzatok száma $2 \cdot 7 = 14$.

- 2.) Pista bácsi eladott ötven tehenet. A tehenek felét Kérődzéslakon adta el, itt egy állatért 800 tallért kapott. A teljes állomány kétötödét Kecskéváron a vásárban értékesítette, itt akciós ajánlatot hirdetett és a tehenek darabját 600 talléros áron adta el. A többi tehenet a fősvény komája vásárolta meg és egy állatért csak 500 tallért fizetett. Átlagosan milyen áron tudott értékesíteni egy tehenet? Számítsuk ki minden esetben, hogy mennyivel kapott többet, illetve kevesebbet ahhoz az összeghez képest, amelyet a tehenek átlagos árából kiindulva kapott volna?

Megoldás:

Kérődzéslakon 25 tehenet adott el és ezekért $25 \cdot 800 = 20\,000$ tallért kapott. Kecskéváron a teljes állomány kétötödét adta el, vagyis $50 : 5 \cdot 2 = 20$ állatot, így itt a bevétele $20 \cdot 600 = 12\,000$ tallér volt. A fősvény koma a megmaradt 5 tehénért $5 \cdot 500 = 2500$ tallért fizetett. Így Pista bácsi teljes bevétele az 50 tehén eladásából $20\,000 + 12\,000 + 2500 = 34\,500$ tallér volt. Tehát egy tehén átlagos ára $34\,500 : 50 = 690$ tallér volt.

Kérődzéslakon $25 \cdot 690 = 17\,250$ tallért kapott volna, ha a teheneket átlagos áron adta volna el. Ennél viszont $20\,000 - 17\,250 = 2750$ tallérral többet kapott.

Kecskéváron a bevétele $20 \cdot 690 = 13\,800$ lett volna, ennél viszont $13\,800 - 12\,000 = 1800$ tallérral kevesebbet kapott.

A fősvény koma átlagos áron $5 \cdot 690 = 3450$ tallért fizetett volna, viszont ennél $3450 - 2500 = 950$ tallérral kevesebbet fizetett.

- 3.) Aligisznakfálván a falu kocsmárosa november hónapban számításokat végzett az eladott pálinka mennyiségével kapcsolatban. Számításaiból kiderült, hogy a hónap első 20 napján átlagosan naponta 18 liter pálinka fogyott el. Mennyi volt a hátralévő napok átlagos napi fogyasztása, ha a teljes hónapban a napi átlagfogyasztás 21 liter volt?

Megoldás:

Mivel a teljes hónapra vonatkoztatva a napi átlagfogyasztás 21 liter volt, a november hónap pedig 30 napos, ezért ebben a hónapban összesen $21 \cdot 30 = 630$ liter pálinka fogyott el. Az első 20 napon, mivel a napi átlagfogyasztás 18 liter volt, a kocsmáros $20 \cdot 18 = 360$ liter pálinkát adott el. Tehát a hátralévő tíz napon $630 - 360 = 270$ liter pálinka fogyott el, így az egy napra eső átlagos fogyasztás $270 : 10 = 27$ liter volt.

- 4.) Egy család nyaralás céljából európai körútra indult. Feljegyezték és táblázatba foglalták a naponta megtett távolságokat és az elfogyasztott üzemanyagot.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat
Megtett út (km)	350	250	200	300	250	150
Üzemanyag (liter)	25	22	20	26	15	12

Mennyi volt a hat napon a 100 km-re eső átlagos fogyasztás? A napi fogyasztások hány literrel térnek el az átlagos fogyasztástól?

Megoldás:

Az elfogyasztott üzemanyag $25 + 22 + 20 + 26 + 15 + 12 = 120$ liter, a megtett távolság pedig $350 + 240 + 220 + 300 + 240 + 150 = 1500$ km. Vagyis 1500 km távolság megtételéhez 120 liter üzemanyagra volt szükség. Mivel a 100 km az 1500 km-nek az $\frac{1}{15}$ része, ezért a 100 km-re eső átlagfogyasztás $120 : 15 = 8$ liter üzemanyagot jelent.

Hétfőn a megtett út 350 km, amely a 100 km-nek a 3 és félszerese. Tehát az átlagos üzemanyag fogyasztást (8 liter/100 km) véve alapul, a hétfői napon 28 litert (a 8 liternek a 3 és félszerese) fogyasztottak volna. Viszont ők csak 25 litert fogyasztottak, ez pedig 3 literrel kevesebbet jelent az átlagos fogyasztásnál.

Hasonlóan járunk el a többi nap esetében is. Így adódik, hogy kedden 2 literrel többet, szerdán 4 literrel többet, csütörtökön 2 literrel többet, pénteken 5 literrel kevesebbet fogyasztottak ahhoz képest, mintha minden 100 km megtételéhez 8 liter üzemanyaggal (átlagfogyasztás) számoltunk volna. (Szombaton nem tér el a valós fogyasztás az átlagostól.)

Gyakorló feladatok

- 1.) Béla egy vetélkedőn az első fordulóban 73 pontot, a másodikban 84 pontot, a harmadikban 62 pontot szerzett. Hány pontot kell szereznie a negyedik fordulóban ahhoz, hogy az egy fordulóra eső pontok átlaga 68 legyen?
- 2.) Egy iskolában a végzős évfolyam 176 diákból áll. Az évfolyam matematika próbaérettségirt, a jegyek átlaga 3,5 lett. Tudjuk, hogy 45-en kaptak ötöst, 53-an négyest és 16-an egyest. Hányan kaptak hármast és hányan kaptak kettest az évfolyamon?
- 3.) A Nemsokatfutunk FC kezdőcsapatában a 11 játékos átlagéletkora 19 év. A bővített keretben (a kezdőcsapat tagjai és a cserejátékosok) 16 játékos van, ezek átlagéletkora 24 év. Hány év a cserecsapat játékosainak átlagéletkora?
- 4.) Öt szám átlaga 78. Ezek közül az első három szám átlaga 64. A negyedik és ötödik szám különbsége 36. Mennyivel egyenlő a negyedik, illetve ötödik szám külön-külön?

Kitűzött feladatok

- 1.) Egy osztályban matematika dolgozatot írtak. Meglepetésre minden osztályzatból kétszer annyi volt, mint az osztályzat konkrét értéke. Aznap két tanuló hiányzott, ők a dolgozatot egy következő napon írták meg és mindketten egyest kaptak. Számítsuk ki az osztályzatok átlagát!
- 2.) Egy négy főből álló építőbrigád Ausztriában vállalt munkát. A munkabérük egy főre jutó átlaga 4500 euró volt. András és Béla jövedelmének átlaga 4130 euró volt, Csaba pedig 380 euróval többet kapott, mint Dénes. Hány euró volt Csaba, illetve Dénes jövedelme külön-külön?
- 3.) Pista bácsi teljes baromfi állományának $\frac{2}{9}$ része liba, $\frac{3}{8}$ része kacsa, $\frac{5}{72}$ része pulyka, ezen kívül pedig még van 24 tyúkjá is. Egy napon, a baromfiudvaron állva így morfondírozik: „Ha eladnám a teljes állományt, akkor átlagosan egy baromfiért 5200 forintot kapnék. Ha viszont csak a libákat, kacsákat és tyúkokat adnám el, akkor egy baromfi átlagosan 4800 forintos árban kelne el.” Hány forintért szándékozott Pista bácsi eladni egy pulykát?
- 4.) Matekottudom és Számolástvétek településeken összesen 216-an érettségiztek. Számolástvéteken az érettségizők száma 36-tal több volt, mint a Matekottudom településen érettségizők kétszerese. A 216 tanuló érettségi átlaga 65 pont, míg Számolástvétek településen az érettségi átlag 70 pont volt. Mennyi volt az érettségi átlag Matekottudom településen?

Beküldési határidő: **2021.03.04.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt



SZÖGSZÁMÍTÁSI FELADATOK

Következzen egy kis geometria ismétlés. Mindenki által ismert tények:

- háromszög belső szögeinek összege 180^0 ,
- szimmetrikus háromszög alapon fekvő szögei egyenlőek,
- derékszögű háromszög két hegyesszögének összege 90^0 ,
- Egy szabályos háromszög egyik felét félszabályos háromszögnek hívjuk. Legrövidebb oldala fele akkora, mint a leghosszabb, szögei 30^0 , 60^0 , 90^0 ,
- nevezetes szögpárok (párhuzamos szárú szögek, mint egyállású, váltószögek, társszögek).

Egy utolsó izgalmas kaland az idei tanévi verseny utolsó fordulójában. Jó munkát, sok sikert!

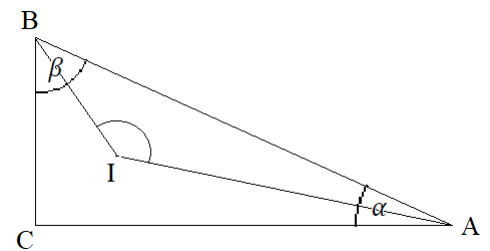
Mintapéldák

- 1.) Mekkora szöget zárnak be egy derékszögű háromszög két hegyesszögének szögfelezői?

Megoldás:

Az ABC, C-ben derékszögű háromszög két hegyesszögének szögfelezői I-ben metszik egymást. Az AIB háromszögben

$$AIB = 180^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^0 - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^0 - \frac{90^0}{2} = 180^0 - 45^0 = \mathbf{135^0}.$$

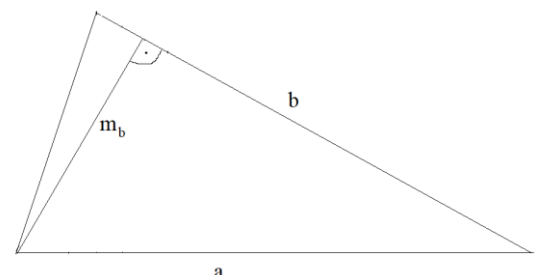


- 2.) Mekkora az ABC háromszög szögei, ha két magassága legalább akkora, mint a hozzá tartozó alap?

Megoldás:

A feltétel szerint: $m_a \geq a$ és $m_b \geq b$.

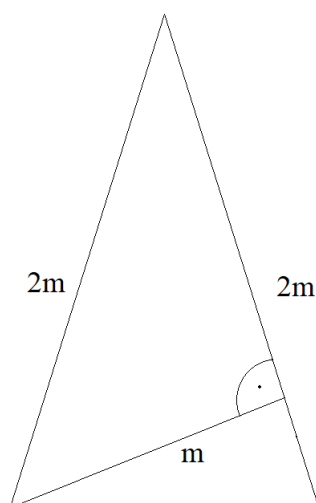
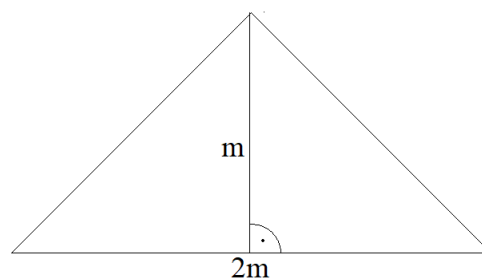
Az $a \geq m_b$ mindig igaz, hiszen az ábrán látható, hogy az egyik egy derékszögű háromszög befogója, a másik pedig az átfogó. Ugyanígy igaz a $b \geq m_a$ egyenlőtlenség is. Így felírhatjuk, hogy $a \geq m_b \geq b \geq m_a \geq a$. Itt minden egyenlőtlenségben egyenlőség kell, hogy álljon, mert másképp $a > a$ lenne. Az $a = m_b = b = m_a = a$ egyenlőségekből következik, hogy a háromszög derékszögű és egyenlő szárú, szögei: 45^0 , 45^0 és 90^0 .



- 3.) Mekkora lehetnek annak a tükrös háromszögnek a szögei, amelynek az egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó magasságnak?

Megoldás:

Ha az alap kétszerese a hozzá tartozó magasságnak, akkor ez a magasság a háromszöget két egyenlő szárú, derékszögű háromszögre bontja, így a háromszög szögei: 45° , 45° és 90° .

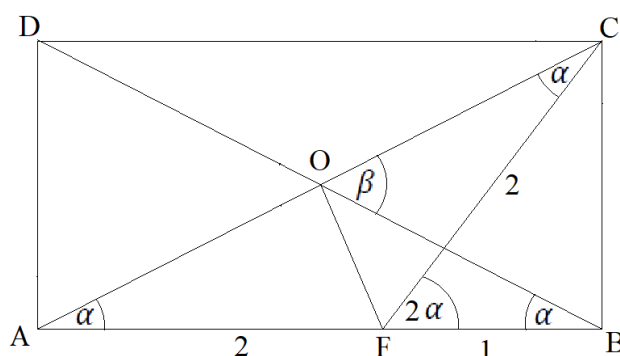


Ha a szár kétszerese a hozzá tartozó magasságnak, akkor a szárszög 30° -os, mivel félszabályos háromszöget kaptunk. A háromszög szögei így: 75° , 75° és 30° .

- 4.) Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalt 1:2 arányban osztja. Mekkora a két átló által bezárt szög?

Megoldás:

Megoldás: $AF = FC$, hiszen OF az AC felezőmerőlegese, így AFC háromszög tükrös. Jelöljük az OAF és OCF szöget egyaránt α -val. Az AFC háromszög F -nél levő külső szöge 2α . Az FBC derékszögű háromszög egyik befogójának és az átfogónak az aránya 1:2, ezért $2\alpha = 60^\circ$. Az ABO egyenlő szárú háromszög O -nál levő külső szöge (az átlók szöge) $\beta = 2\alpha$, azaz 60° .



Gyakorló feladatok

- 1.) Egy egyenlő szárú háromszöget az egyik szögének szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja. Mekkora a háromszög szögei?
- 2.) Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának, és a legnagyobb oldallal szemközti szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközti szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?
- 3.) Bizonyítsd be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15° , akkor az átfogó négyeszerese az átfogóhoz tartozó magasságának!
- 4.) Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalából a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

Kitűzött feladatok

- 1.) Egy húrtrapézt az egyik átlója két egyenlő szárú háromszögre bont. Mekkora a trapéz szögei?
- 2.) Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 5-szöröse a másik hegyesszögének, a háromszög átfogója 40 cm. Számítsuk ki a háromszög területét!
- 3.) Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja kétszerese a rövidebb alapnak. Tudjuk még, hogy a trapéz átlója felezi a trapéz hegyesszögét. Mekkora a trapéz szögei?
- 4.) Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB = BC$, és a háromszög magasságpontja M. Mekkora a háromszög szögei, ha $MB = AC$?

Beküldési határidő: **2022.03.04.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.